

Analisi Matematica I : II prova intermedia
 Corso: OMARI ○ TIRONI ○
 A.a. 2003–2004.

COGNOME e NOME _____ N. Matricola _____

Anno di Corso _____ Laurea in Ingegneria _____

ESERCIZIO N. 1. Sia

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} - \sin(7x), & \text{se } x < 0; \\ 1 - x\sqrt[3]{x}, & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

(i) Si dica se esistono e, in caso affermativo, si calcolino

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$: non esiste
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

(ii) Si verifichi che f è continua in 0.

Poiché $f(0) = 1 = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, f è continua in 0.

(iii) Ricorrendo alla definizione, si calcolino le derivate sinistra e destra di f in 0:

- $f'_s(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{\frac{1}{1-x} - \sin(7x) - 1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{1-x} - 7 \frac{\sin(7x)}{7x} \right) = 1 - 7 = -6$
- $f'_d(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - x\sqrt[3]{x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\sqrt[3]{x} = 0$

(iv) Si dica se f è derivabile in 0.

Poiché $f'_s(0) \neq f'_d(0)$, f non ha derivata in 0.

(v) Si verifichi che esiste un solo punto $\bar{x} > 0$ tale che $f(\bar{x}) = 0$.

Poiché f è continua su $[0, +\infty[$, $f(0) = 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ (e quindi per il teorema della permanenza del segno esiste $b > 0$ tale che $f(b) < 0$), il teorema di Bolzano garantisce l'esistenza di almeno un punto di annullamento $\bar{x} > 0$ di f . Inoltre, essendo la funzione $x \mapsto x^{\frac{4}{3}}$ crescente su $[0, +\infty[$, f è decrescente su $[0, +\infty[$ e quindi il punto di annullamento \bar{x} è unico. Una semplice verifica mostra infine che $\bar{x} = 1$.

ESERCIZIO N. 2. Si calcoli

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 2^{\cos x}}{x^2}.$$

RISULTATO

$$\log 2$$

SVOLGIMENTO

Si ha

$$\frac{2 - 2^{\cos x}}{x^2} = 2 \cdot \frac{1 - 2^{(\cos x - 1)}}{\cos x - 1} \cdot \frac{\cos x - 1}{x^2} \rightarrow 2 \cdot (-\log 2) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \log 2,$$

se $x \rightarrow 0$.**ESERCIZIO N. 3.** Si calcoli

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\log_{(x^2)}(x+1) - \log_{(x+1)} x \right).$$

RISULTATO

$$-\frac{1}{2}$$

SVOLGIMENTO

Si ha

$$\begin{aligned} \log_{(x^2)}(x+1) - \log_{(x+1)} x &= \frac{\log(x+1)}{2 \log x} - \frac{\log x}{\log(x+1)} = \\ &= \frac{\log x + \log(1 + \frac{1}{x})}{2 \log x} - \frac{\log x}{\log x + \log(1 + \frac{1}{x})} \rightarrow \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}, \end{aligned}$$

se $x \rightarrow +\infty$.